Exercices d'algèbre 1 : première partie

Mode d'emploi :

- bon nombre d'exercices ne seront pas traités en TD.
- les exercices précédés de "Tous TD" ou "Cours" doivent être faits dans tous les groupes de TD.
- les résultats des exercices précédés de “Cours" sont à connaître et peuvent être utilisés directement lors des contrôles.
- les exercices précédés de (∗) sont en général assez faciles et doivent être préparés à la maison. C'est un strict minimum et il est conseillé de préparer également d'autres exercices.
- il faut apprendre son cours avant d'essayer de faire les exercices ; d'autre part, il est plus formateur de comprendre à fond quelques exercices que d'en comprendre beaucoup à moitié.

1 Exercices sur la logique et énigmes

Exercice 1.1 (∗) (sens et négation du OU et du ET)

Jean est blond et Julie est brune. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, puis les nier.

1. Jean est brun ou Jean est blond.
2. Jean est roux et Julie est brune.
3. Jean n'est pas blond ou Julie est brune.
4. Il n'est pas vrai que Jean n'est pas blond.

Exercice 1.2 (∗) (négation du OU et du ET) Soit x un réel. Nier les propositions suivantes :

1. $x = 1$ ou $x = -1$
2. $0 \leq x \leq 1$ (ce qui veut dire par définition : $0 \leq x$ et $x \leq 1$)
3. $x = 0$ ou ($x^2 = 1$ et $x \geq 0$)

Exercice 1.3 (énoncés avec l'ensemble vide) Soit P la proposition “Tous les habitants de la lune sont des harengs". Nier P. On suppose que la lune n'a aucun habitant. La négation de P est-elle vraie ou fausse ? P est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 1.4 (∗) (négation d'énoncés avec quantificateurs) Nier, en français courant, les propositions suivantes :

1. Il y a au moins un étudiant qui aime le tennis.
2. Tous les étudiants aiment lire.
3. Dans toutes les matières, il y a au moins un étudiant qui travaille régulièrement.
4. Il y a un étudiant qui travaille régulièrement dans toutes les matières.

Exercice 1.5 (propriétés du OU et du ET) Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :

(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D)

Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.6 (Tous TD) (compréhension et négation d'implications) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

1. Pour tout réel x, si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$
2. Pour tout entier naturel n, si $n > 1$ alors $n \geq 2$
3. Pour tout réel x, si $x > 1$ alors $x \geq 2$
4. Pour tout réel x, $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \geq 1$

(pour le 4., on pourra se rappeler qu'une équivalence est une double implication)

Exercice 1.7 ($*$) (ordre des quantificateurs, importance de l'ensemble auquel appartiennent les éléments) Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout entier naturel n, il existe un réel x tel que $x > 2n$
2. Il existe un réel x tel que, pour tout entier naturel n, $x > 2n$
3. Pour tout réel x, pour tout réel y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.
4. Pour tout réel positif x, pour tout réel positif y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.

Exercice 1.8 (Tous TD) (implications) Donner la réciproque et la contraposée des implications suivantes (x est un réel, n un entier naturel)..

1. Si le père Noël existe alors Noël est en juillet
2. Si $x \geq 3$, alors $x + 2 \geq 5$.
3. Si $n \geq 1$ alors $n^2 > n$.

Exercice 1.9 (Tous TD) Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x, y)$ l'expression "x est la fille de y", où x et y sont des femmes. Ecrire les formules suivantes dans le langage des ensembles puis en écriture formalisée, puis les nier en écriture formalisée.

1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a au moins une mère.
4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.

Par exemple, la première proposition s'écrit "pour tout y dans F, il existe x dans F tel que x est la fille de y" dans le langage des ensembles, et $\forall y \in F, \exists x \in F, P(x, y)$ en écriture formalisée. Sa négation en écriture formalisée est : $\exists y \in F, \forall x \in F, non P(x, y)$

Exercice 1.10 (compréhension d'énoncés avec quantificateurs, importance de l'ordre). A l'université Deuxphine, il n'y a que deux étudiants : Jean et Julie, et trois matières : algèbre, analyse et économie. Les résultats des étudiants sont les suivants.

	Algèbre	Analyse	Economie
Jean	12	5	16
Julie	14	15	7

Soit $E = \{$Jean, Julie$\}$ l'ensemble des étudiants. Soit $F = \{$algèbre, analyse, économie$\}$ l'ensemble des matières. Pour tout x dans E et tout y dans F, on désigne par $P(x, y)$ l'expression : "l'étudiant x a la moyenne (10 ou plus) dans la matière y".

Oralement, exprimer en français courant les propositions suivantes. Dire en justifiant si elles sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$
2. $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$
3. $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$
4. $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x,y)$
5. $\exists y \in F, \forall x \in E, \text{non}P(x,y)$
6. $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y)$

Par exemple, la première proposition se lit “Pour tout élément x de E, pour tout élément y de F, x a la moyenne dans la matière y". En français courant, on dirait “Tous les étudiants ont la moyenne dans toutes les matières". C'est faux, puisque Jean n'a pas la moyenne en analyse.

Exercice 1.11 (Cours) Soit a un réel. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

P : Si (pour tout réel strictement positif ϵ, on a $|a| < \epsilon$) alors $a = 0$

Q : (Il existe un réel strictement positif ϵ tel que $|a| \geq \epsilon$) ou $a = 0$

R : Si $a \neq 0$ alors (il existe un réel strictement positif ϵ tel que $|a| \geq \epsilon$)

Montrer que R est vraie. En déduire que P et Q sont vraies.

Exercice 1.12 Donner, en français courant, un exemple de ou inclusif et un exemple de ou exclusif. En mathématiques, le ou est-il inclusif ou exclusif ?

Exercice 1.13 (Tous TD) *(Un problème courant dans la rédaction des récurrences)* Supposons qu'on veuille démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$. Corrigez la rédaction suivante :

Soit P(n) la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$. P(0) est vraie car.... Supposons P(n) vraie. Alors..., donc P($n+1$) est vraie. Donc, par récurrence, $\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$ pour tout entier naturel n.

Exercice 1.14 Une récurrence erronée. On considère des boîtes de crayons de couleurs. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $P(n)$ la proposition : "Dans une boîte quelconque de n crayons de couleurs, tous les crayons sont de la même couleur". Le raisonnement suivant prouve-t-il que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$? Sinon, où est l'erreur ?

Dans une boîte d'un seul crayon, les crayons ont bien sûr tous la même couleur. Donc $P(1)$ est vraie.

Soit maintenant n dans $\mathbb{N}^*$. Prenons une boîte de $n+1$ crayons. Si l'on enlève provisoirement un crayon, il reste n crayons qui, d'après $P(n)$, sont tous de la même couleur. Remettons le crayons mis à l'écart et enlevons un autre crayon. Toujours d'après $P(n)$, les n crayons restants sont tous de la même couleur. Mais comme les crayons qui ne sont pas sortis de la boîte ont une couleur constante, il s'ensuit que les $n+1$ crayons ont même couleur. Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Question subsidiaire : pour quelles valeurs de n l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est-elle vraie ?

Voyage sur l'île de Puro-Pira (à faire à la maison, les solutions seront mises en ligne).

Le type d'énigme qui suit a été popularisé par le logicien Raymond Smullyan, dont je vous conseille vivement les livres. Vous vous trouvez sur une île un peu étrange : l'île de Puro-Pira. Vous savez qu'à part vous, on y trouve deux catégorie de gens : les Purs, qui ne disent que des choses vraies, et les Pires, qui ne disent que des choses fausses.

Alice et Bernard sont deux habitants de l'île de Puro-Pira. Il se peut que ce soient deux Purs, deux Pires, une Pure et un Pire,... Tout est possible. De plus, les questions sont indépendantes (donc il se peut que Bernard soit un Pire dans la question 1 et un Pur dans la question 2). Sauf indication contraire, votre but est de déterminer le type des habitants que vous rencontrez. Cela ne sera pas toujours possible, mais presque. Pour vous aider, les réponses aux quatres premières questions sont données dans les notes de bas de page.

On rappelle que "Si P alors Q" veut dire "(non P) ou Q". Donc si un Pur dit "Si P alors Q", c'est que P est fausse ou Q est vraie. Si un Pire dit "Si P alors Q", c'est que P est vraie et Q est fausse. D'autre part, dans ce qui suit et comme toujours en mathématiques, le "ou" est inclusif.

Rencontre 1. Bernard vous dit : "Nous sommes tous les deux des Pires". Qu'en déduisez-vous ? [1]

Rencontre 2. Alice vous dit : "Je suis une Pure et Bernard est un Pire". Que peut-on en déduire ? [2]

Rencontre 3. Alice vous dit : "Si je suis une Pure alors Bernard est un Pire". Qu'en déduisez-vous ? [3]

Rencontre 4.

Alice : "Je suis une Pure ou Bernard est un Pur."

Bernard : "Nous ne sommes pas du même type." [4]

A vous de résoudre les énigmes suivantes.

Question 5 :

a) trouver une phrase que ni un Pur ni un Pire ne peut dire ;

b) trouver une phrase qui peut-être dite par un Pur mais aussi par un Pire.

Rencontre 6.

Alice : "Je ne suis ni une Pure ni une Pire."

Bernard "C'est vrai !"

Rencontre 7. Chloé est une habitante de l'île de Puro-Pira.

Vous : "Est-ce que Bernard et Chloé sont tous les deux des Purs ?"

Alice : "Oui."

---

[1] Réponse : un Pur ne pourrait pas dire ça. Donc Bernard est un Pire. Donc ce qu'il dit est faux. Donc Alice et Bernard ne sont pas tous les deux des Pires. Or Bernard est un Pire. Donc Alice est une Pure.

[2] Réponse : la seule chose que l'on puisse en déduire, c'est qu'Alice et Bernard ne sont pas tous les deux des Purs.

[3] Réponse : Alice est une Pure et Bernard est un Pire. Supposons qu'Alice soit une Pire. Alors ce qu'elle dit est vraie (rappelez-vous que si P est fausse alors nonP est vraie, donc nonP ou Q est vraie, donc par définition "si P alors Q" est vraie). Donc Alice est une Pure. Contradiction. Notre supposition initiale était donc fausse. Donc Alice est une Pure. Donc ce qu'elle dit est vraie. Donc Bernard est un Pire.

[4] Alice et Bernard sont tous les deux des Pires. En effet, supposons qu'Alice soit une Pure. Alors il y a deux cas : 1er cas, Alice et Bernard sont tous les deux des Purs. Alors Bernard dit la vérité, donc il ne peut pas dire "Nous ne sommes pas du même type". Contradiction. 2ème cas, Alice est une Pure et Bernard est un Pire. Alors Bernard ment toujours. Donc il ne peut pas dire "Nous ne sommes pas du même type", puisque c'est vrai. Contradiction. Donc supposer qu'Alice est une Pure mène à une contradiction. Donc Alice est une Pire. Donc ce qu'elle a dit est faux. Donc Alice et Bernard sont tous les deux des Pires.

Vous : "Est-ce que Bernard est un Pur ?"
Alice : "Non."

Rencontre 8. Entre Alice, Bernard et Chloé, l'un des trois est le chef du village.
Alice : "C'est moi le chef."
Bernard : "C'est moi le chef."
Chloé : "Au plus l'un de nous trois dit la vérité."
Qui est le chef ?

Question 9 (difficile). Sur l'île des Purs et des Pires, on a volé un cheval. Il y a 4 suspects (dont un et un seul est coupable) : Alice, Bernard, Chloé et David. Les 3 premiers sont présents au tribunal, le 4ème, David, n'a pas encore été pris. Le juge, qui est un Pur et raisonne parfaitement, pose la question : "Qui a volé le cheval ?". Voici les réponses :
Alice : "C'est Bernard qui a volé le cheval."
Bernard : "C'est Chloé qui a volé le cheval."
Chloé : "C'est David qui a volé le cheval."
Alors, l'un des 3 accusés dit : "Les 2 autres mentent !". Le juge réfléchit et après quelques instants, il désigne l'un des 3 et lui dit : "Vous ne pouvez pas avoir volé le cheval, vous êtes libre." Qui est-ce ?

L'audience se poursuit après le départ de l'innocent. Le juge demande à l'un des 2 si l'autre est un Pur et après qu'on lui a répondu par OUI ou par NON, il sait qui a volé le cheval. Qui est-ce ?

Des Espions sur l'île de Puro-Pira.

L'île de Puro-Pira a été infiltrée par des Espions. Ceux-ci peuvent dire la vérité, mentir, dire des choses paradoxales : tout est possible. Vous savez que parmi Alice, Bernard et Chloé, il y a exactement un Pur, un Pire, et un Espion. Vous devez devinez qui est quoi.

Rencontre 10.
Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Je suis un Pire."
Chloé : "Bernard n'est pas un Pur."

Rencontre 11.
Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Je suis un Pire."
Chloé : "Alice est une Espionne."

Rencontre 12.
Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Alice est une Pure."
Chloé : "Si vous me posiez la question, je vous dirais qu'Alice est une Espionne."

2 Ensembles, raisonnement, indices

Exercice 2.1 ($*$) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier.
a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$
b) $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$

Exercice 2.2 ($*$) (ensembles : définitions) Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 6, 2\}$ et $C = \{1, 3\}$. Calculer $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $C_A(B)$ et $B \backslash C$.

Exercice 2.3 *($*$) (ensembles : définitions)* Soient $A = \{3, 5\}$, et $B = \{2, 5, 9\}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 2.4 *($*$) (ensembles : définitions)* Soit $E = \{a\}$ un ensemble à un élement. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 2.5 *(Cours)* (propriétés des ensembles) Soient A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A. Démontrer les propriétés suivantes : a) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; b) $C_A(C_A(X)) = X$; c) $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$; d) $X \subset Y \iff C_A(Y) \subset C_A(X)$

Exercice 2.6 (une rédaction confuse conduit à des erreurs) Que pensez-vous de la démonstration suivante ?

"Pour tout réel x, $(x-2)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2, x \neq 1$, or x ne peut pas être égal à la fois à 2 et à 1, donc pour tout réel x, $(x-2)(x-1)$ est non nul".

Exercice 2.7 *($*$)* (ensembles, équivalence) Soient A et B des ensembles. Montrer que $A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Exercice 2.8 *(Tous TD)* (preuve par contraposée) Montrer par contraposée que pour tout entier naturel x, si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 2.9 *(Cours)* Soit x un réel positif ou nul. Montrer que si pour tout réel y strictement positif, $x \leq y$, alors $x = 0$.

Exercice 2.10 (Tous TD) (preuve par l'absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par l'absurde que $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 2.11 *(Tous TD, au moins en partie)* (preuve cyclique) Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E. Soient $\bar{A}$ et $\bar{B}$ leur complémentaires dans E respectifs. Montrer que les 8 propositions suivantes sont équivalentes :

$$(i)\, A \subset B \qquad (ii) A \cap B = A \qquad (iii) \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A} \qquad (iv) A \cap \bar{B} = \emptyset$$
$$(v) \bar{A} \cup B = E \qquad (vi) \bar{B} \subset \bar{A} \qquad (vii) \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{B} \qquad (viii) A \cup B = B$$

Exercice 2.12 *(Tous TD)* (indices : définitions) Pour tout entier relatif k, on pose $a_k = k^2$. Calculer les sommes suivantes :
a) $\sum_{k=2}^{4} a_k$; b) $\sum_{k=4}^{2} a_k$; c) $\sum_{k=1}^{3} a_{2k-5}$; d) $\sum_{k=1}^{3} k a_k$; e) $\sum_{\{k \in \mathbb{N} | 2 \leq k^3 \leq 100\}} a_k$; f) $\sum_{\{k \in \mathbb{N} | 1 \leq 3k \leq 10\}} a_{2k-5}$

Exercice 2.13 *(Tous TD, au moins a) et c)) (récurrences)* Démontrer par récurrence les égalités suivantes :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad b)\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad c)\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 2.14 *(∗)* (indices : définitions) Pour tout entier relatif k, on pose $A_k = [k, k+10]$. Que valent les unions et intersections suivantes ?

a) $\displaystyle\bigcup_{k=3}^{9} A_k$; b) $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$; c) $\displaystyle\bigcap_{k=3}^{9} A_k$; d) $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$

Exercice 2.15 *(Tous TD)* (indices, union, intersection) Que valent les unions et intersections suivantes ?

a) $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{R}} [\sin x, 1+\sin x]$; b) $\displaystyle\bigcup_{x\in[1,+\infty[} \left]\frac{1}{x}, x\right[$; c) $\displaystyle\bigcap_{x\in[1,+\infty[} \left]\frac{1}{x}, x\right[$; d) $\displaystyle\bigcap_{x\in[1,+\infty[} \left[\frac{1}{x}, x\right]$

Exercice 2.16 *(Tous TD)* (indices, propriétés de l'union et de l'intersection) Soient A un ensemble, I un ensemble d'indices et $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indexée par I (c'est à dire, la donnée pour tout i dans I d'un ensemble B_i). Montrer que :

$$A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i) \quad \text{et} \quad A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$$

Exercice 2.17 (ensembles) Soient A un ensemble et X, Y, Z des parties de A.

a) Donner un exemple où : $X\cup Y = X\cup Z$ et $Y \neq Z$.
b) Donner un exemple où : $X\cap Y = X\cap Z$ et $Y \neq Z$.
c) Démontrer que

$$(X\cup Y = X\cup Z \quad \text{et} \quad X\cap Y = X\cap Z) \quad \Longrightarrow Y = Z\ .$$

Exercice 2.18 (ensembles, quantificateurs) On considère les ensembles

$$E = \left\{x \in [0,1], \exists n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\} \text{ et } F = \left\{x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\}$$

L'ensemble E a-t-il un, une infinité, ou aucun élément ? Même question pour l'ensemble F.

Exercice 2.19 Pour tout entier naturel p, on note $p\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers relatifs de la forme pn avec n dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathbb{N} \subset q\mathbb{N} \Leftrightarrow p \in q\mathbb{N}$$

b) Montrer que pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathbb{N} = q\mathbb{N} \Leftrightarrow p = q$$

Exercice 2.20 Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E. Soit $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E. Montrer les propriétés suivantes :

a) $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\cup C)$ *b)* $A\cap(\bar{A}\cup B) = A\cap B$

Exercice 2.21 (Différence symétrique de deux parties.) Soit E un ensemble. Pour A et B des parties de E, on note $A\Delta B$ l'ensemble $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$. Soient A, B et C des parties de E. Montrer que :

$$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$
$$A\Delta\emptyset = A,\ A\Delta B = B\Delta A,\ A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$$
$$A \cap (B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

Exercice 2.22 *(note aux chargés de TD : les notations* min *et* max *ne sont pas forcéments connus à ce stade)*Soit $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ une famille de réels. On définit

$$A = \min_{1\leq i\leq n}(\max_{1\leq j\leq p} a_{ij}), \quad B = \max_{1\leq j\leq p}(\min_{1\leq i\leq n} a_{ij})$$

Montrer que $B \leq A$.

Exercice 2.23 (difficile) Soit $(A_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de parties d'un ensemble E.
Comparer $\bigcap_{i\in I}\Big(\bigcup_{j\in J} A_{ij}\Big)$ et $\bigcup_{j\in J}\Big(\bigcap_{i\in I} A_{ij}\Big)$.

Exercice 2.24 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow n! \geq 2^n.$$

Exercice 2.25 (différence entre l'ensemble vide, et l'ensemble contenant uniquement l'ensemble vide). Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Quel est l'ensemble des solutions des problèmes suivants ?
Problème 1 : quels sont les sous-ensembles de E qui ont au moins 4 éléments distincts ?
Problème 2 : quels sont les sous-ensembles de E inclus dans $C_E(E)$?

Exercice 2.26 *(∗)* (réindexation d'une somme) : Soient x un réel et n un entier naturel. Calculer la somme $\sum_{k=2}^{n+2} x^{n+2}$.

3 Applications

Exercice 3.1 *(∗)* Soient $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{0, 1\}$. Donner des exemples d'applications de A dans B. Combien y-a-t-il de telles applications ? Mêmes questions pour les applications de B dans A.

Exercice 3.2 *(∗)* Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par : pour tout réel x, $f(x) = x^2$. Déterminer :
a) $f([-1, 1])$, $f([0, 3[)$, $f(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R}_-)$; b) $f([-2, 0]\cap[0, 2])$ et $f([-2, 0])\cap f([0, 2])$ (comparez !) ;
c) $f^{-1}([0, 3[)$, $f^{-1}([-10, 3[)$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$.

Exercice 3.3 *(Tous TD)* Soit l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par : pour tout réel x, $g(x) = \sin x$. Sans justifier, donner :
a) $g([0, 2\pi])$, $g(\mathbb{R})$, $g([0, 10[)$ et $g([0, \frac{\pi}{2}[)$; b) $g^{-1}([2, +\infty[)$, $g^{-1}(\mathbb{R})$, $g^{-1}([-1, 1])$ et $g^{-1}([-1, 1[)$.

Exercice 3.4 *(∗)* Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
1) $f : \{0, 1, 2\} \to \{1, 8, -1, 24\}$ telle que $f(0) = -1$, $f(1) = 24$, $f(2) = 1$.
2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$n \mapsto -n$
3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n + 1$
4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n - 1$
5) $f : \mathbb{N} \to \{-1, +1\}$ qui à tout n de $\mathbb{N}$ associe 1 si n est pair, et -1 si n est impair.

Exercice 3.5 *(∗)* Pour chacune des applications 1), 2), 3) et 5) de l'exercice précédent, calculer : $f(\{2\})$, $f(\{0,2\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-1,1\})$.

Exercice 3.6 *(∗)* Les applications suivantes sont elles-bien définies ? Si oui, sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$1)\ f_1:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}\qquad 2)\ f_2:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+\\ x\mapsto x^2\end{array}\qquad 3)\ f_3:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}\qquad 4)\ f_4:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+\\ x\mapsto x^2\end{array}\qquad 5)\ f_5:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_-\\ x\mapsto x^2\end{array}$$

Exercice 3.7 Même exercice pour les applications suivantes :

$$1)\ g_1:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{N}\\ x\mapsto x^2\end{array}\qquad 2)\ g_2:\ \begin{array}{l}\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\\ x\mapsto x^2\end{array}\qquad 3)\ g_3:\ \begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}\qquad 4)\ g_4:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{N}\\ x\mapsto x^2\end{array}$$

Exercice 3.8 *(Tous TD)* Soient E et F de parties de E. Soit $f : E \to F$ une application. Soit y un réel. Expliquer (informellement) comment l'on trouve à partir du graphe de f les solutions dans E de l'équation $f(x) = y$. Comment lit-on sur le graphe de f que f est injective ? surjective ? bijective ? (Attention : ceci a pour but de vous faire comprendre les notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité. Mais répondre lors d'un examen : "l'application f est injective car son graphe a telle propriété", sans prouver rigoureusement que le graphe a cette propriété, ne vous vaudra pas tous les points.)

Exercice 3.9 Soit f une application de A vers B. Démontrer que $A = \bigcup_{y\in B} f^{-1}(\{y\})$.

Exercice 3.10 *(Cours)* Soit f une application de E vers F. Soient A et A' des parties de E. Soient B et B' des parties de F. Montrer que :
a) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$; b) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$;
c) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$; d) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
Donner un exemple montrant que l'inclusion du b) peut être stricte.

Exercice 3.11 Soit f une application de E vers F. Soient $A \subset E$, $B \subset F$. Montrer que $A \subset f(f^{-1}(A))$ et $B \subset f(f^{-1}(B))$. Donner des exemples montrant qu'il n'y a pas en général égalité.

Exercice 3.12 *(Tous TD)* (retour sur la logique) Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout réel x, $f(x)$ et $g(x)$ sont positifs. Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, f^2(x) < g^2(x)\}$. On considère les deux propositions suivantes :
P1 : "Pour tout x dans A, $f(x) < g(x)$"
P2 : "Il existe x dans A tel que $f(x) < g(x)$"
a) La proposition P1 est-elle forcément vraie (c'est à dire vraie pour toutes fonctions f et g satisfaisant les hypothèses de l'énoncé) ?
b) La proposition P2 est-elle forcément vraie ? Si oui, le prouver ; sinon, donner un contre-exemple (c'est à dire un exemple d'applications f et g pour lesquelles la proposition est fausse).
c) Soit E un ensemble et pour tout x dans E, soit $P(x)$ une proposition. On suppose que la proposition "Pour tout x dans E, $P(x)$" est vraie. Donner une condition nécessaire et suffisante sur E pour que la proposition "Il existe x dans E tel que $P(x)$" soit vraie.

Exercice 3.13 *(Cours)* Soient E et F des ensembles (finis ou infinis). Montrer qu'il existe une injection de E vers F si et seulement si il existe une surjection de F vers E.

Exercice 3.14 Soit f une application de E vers F. Démontrer les équivalences suivantes :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))$$

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$$

Exercice 3.15 Soit f une application de E vers F et A une partie de E.

a) Démontrer qu'il n'y a en général pas d'inclusion entre $f(C_E(A))$ et $C_F(f(A))$.

b) Toutefois, démontrer : f bijective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(C_E(A)) = C_F(f(A))$.

Exercice 3.16 *(Tous TD)* (Fonction caractéristique)

Soit E un ensemble. A toute partie A de E on associe l'application f_A de E dans $\{0,1\}$ définie par $f_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $f_A(x) = 0$ sinon. L'application f_A est appelée fonction caractéristique de A. Soient A et B deux parties de E. Exprimer en fonction de f_A et de f_B les fonctions caractéristiques de $C_E(A)$, $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \backslash B$.

Exercice 3.17 *(Tous TD)* L'application

$$\begin{array}{rl} g: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto xe^{-x} \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? (On pourra avec profit construire le tableau de variation de g et utiliser des résultats d'analyse). Calculer $g^{-1}(\{-e\})$, $g^{-1}(\{1\})$, $g(\mathbb{R}_+)$ et $g^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 3.18 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

b) On suppose f et g surjectives. A-t-on forcément h surjective ?

c) Montrer que si h est surjective, alors f et g sont surjectives.

d) Donner un exemple où h est injective mais ni f ni g ne sont injectives.

Exercice 3.19 *(∗)* Soient

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$$

a) l'application $h \circ f$ est-elle bien définie ?

b) Prouver que f et h sont bijectives, et déterminer leur réciproques.

Exercice 3.20 (∗) Soient E, F, G des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications.

a) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 3.21 *(∗)* L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (n,p) & \mapsto & n+p \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ? bijective ? Déterminer $f^{-1}(\{3\})$.

Exercice 3.22 Soient E, F, G, H des ensembles et f, g, h des applications telles que : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$

Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 3.23 L'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, xy) \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? bijective ?

Exercice 3.24 *(∗)* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application strictement monotone. Montrer que f est injective. Donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injective mais non monotone.

Exercice 3.25 *(∗)* Sans justifier, pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective, ni injective ni surjective.

1) $f_1 : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{array}$ 2) $f_2 : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to [-1, 1] \\ x \mapsto \sin x \end{array}$ 3) $f_3 : \begin{array}{c} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{array}$ 4) $f_4 : \begin{array}{c} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \\ x \mapsto \sin x \end{array}$

Exercice 3.26 Sans justifier, pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective, ni injective ni surjective.

1) $g_1 : \begin{array}{c} [0, \pi] \to [-1, 1] \\ x \mapsto \cos x \end{array}$ 2) $g_2 : \begin{array}{c} [0, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \\ x \mapsto \cos x \end{array}$ 3) $g_3 : \begin{array}{c}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x \end{array}$ 4) $g_4 : \begin{array}{c}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x \end{array}$

Exercice 3.27 a) Existe-t-il une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement décroissante ?

b) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective mais non strictement croissante.

c) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ involutive ($f \circ f = Id_{\mathbb{N}}$) mais différente de l'identité.

d) (relativement difficile) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective. Montrer que $f(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3.28 (relativement difficile) Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective ou f est surjective si et seulement si $f = Id_E$.

Exercice 3.29 (relativement difficile) Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

4 Relations

Exercice 4.1 (∗) *(relations)* On considère la relation $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tous réels x et y, $x\mathcal{R}y$ ssi $x+y \leq 10$. Cette relation est-elle reflexive ? transitive ? symétrique ? antisymétrique ? totale ? Est-ce une relation d'équivalence ? Est-ce une relation d'ordre

Exercice 4.2 *(cours)* (équivalence) Soient E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par : pour tous x et y dans E, $x\mathcal{R}y$ ssi $f(x) = f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 4.3 *(Tous TD)* (équivalence) Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence (on pourra utiliser l'exercice précédent). Préciser les classes d'équivalence.

a) sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff \cos x = \cos y$;

b) sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff (\cos x = \cos y \text{ et } \sin x = \sin y)$;

c) sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff E(x) = E(y)$, où $E(x)$ dénote la partie entière de x ;

d) sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, $(p, q)\mathcal{R}(p', q') \iff pq' = p'q$;

Exercice 4.4 *(Tous TD)* (équivalence) On considère une partition $\mathcal{P}$ d'un ensemble E, c'est-à-dire une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E telle que :

$$E = \cup_{i\in I} A_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

On définit alors la relation $\mathcal{R}$ sur E par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in I, (x \in A_i \text{ et } y \in A_i)$
Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles en sont les classes d'équivalence ?

Exercice 4.5 *(Tous TD)* (équivalence) *Notation : si n et p sont des entiers relatifs, on dit que n divise p, et on note $n|p$, s'il existe un entier relatif k tels que $p = kn$. Par exemple,* 6 *divise* 12 *et* 30*, mais ne divise pas* 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{N}$ définie par : pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow n|p - q$$

(on dit alors que p est congru à q modulo n). Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que $p\mathcal{R}q$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de p par n est le même que le reste de la division euclidienne de q par n. Quelles sont les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$?

Exercice 4.6 (relations) Soit E un ensemble. Déterminer toutes les relations sur E qui sont à la fois des relations d'équivalence et des relations d'ordre.

Exercice 4.7 (ordre) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ (muni de la relation d'ordre usuelle) admettant chacune une borne supérieure.

i) Montrer que $A \cup B$ a une borne supérieure et que :

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

ii) On définit

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}, \exists(a, b) \in A \times B, x = a + b\}$$

Montrer que $A + B$ a une borne supérieure et que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Exercice 4.8 *(Tous TD)* (ordre) On munit $\mathbb{R}^2$ des deux relations binaires :

$$(x, y)\mathcal{R}_1(x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y' \text{ (ordre produit)}$$
$$(x, y)\mathcal{R}_2(x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \text{ (ordre lexicographique)}$$

On admet que ce sont des relations d'ordre.

i) Soit (a, b) donné dans $\mathbb{R}^2$. Identifier et représenter les ensembles :

$$X_{ab} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}_1(a, b)\}$$
$$Y_{ab} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}_2(a, b)\}$$

ii) Soit $A = \{(-10, 3), (0, 0), (1, -1), (3, 1), (1, 1), (7, 12), (-20, 20)\}$.

a) Pour l'ordre produit : ordonner (classer) les éléments de A (on pourra représenter cet ordre en faisant une flèche d'un élément x à un élément y de A si et seulement si x est plus petit que y) ; quels sont les éléments maximaux de A ? les éléments minimaux ? A a-t-il un plus grand élément ? une borne supérieure ? un plus petit élément ? une borne inférieure ?

b) Même questions pour l'ordre lexicographique.

iii) Montrer que dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre produit, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Est-ce vrai pour l'ordre lexicographique ? (on pourra considérer la partie $B = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$).

Exercice 4.9 *(∗)* (ordre) On admet que l'inclusion est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. Soit
$$A = \{[0,1], [3,10], \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}, \{4,7\}, \mathbb{N}\}.$$
Ordonner les parties de A suivant la relation d'inclusion. Déterminer l'ensemble des minorants (resp. majorants) de A. Quels sont les éléments maximaux de A ? les éléments minimaux ? L'ensemble A a-t-il une borne inférieure ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? un plus grand élément ?

Exercice 4.10 *(Tous TD)* Montrer que si un ensemble E a n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments.

Exercice 4.11 *(préordre)* Soit E un ensemble qui a au moins deux éléments. Sur l'ensemble des parties de E on définit la relation $\mathcal{R}$ par : pour tous A et B dans $\mathcal{P}(E)$, $A\mathcal{R}B$ si et seulement s'il existe une injection de A vers B. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation de préordre.

Exercice 4.12 Donner un exemple de partie d'un ensemble ordonné qui n'a aucun élément maximal.

Exercice 4.13 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie de E. Montrer que si A a un plus grand élément alors A a un et un seul élement maximal. Plus difficile : la réciproque est-elle vraie ?

On munit $\mathbb{N}$ de la relation de divisibilité définie par : $\forall x, y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
$$x|y \iff \exists k \in \mathbb{N}, y = kx$$
On admet que | est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Calculer s'ils existent le plus grand élément, le plus petit élément, l'ensemble des majorants et des minorants des sous-ensembles suivants :
$$A = \{4, 8, 12\}, \quad B = \{2, 3\}, \quad C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad D = \{2, 3, 6, 9, 18\}$$

5 Cardinaux, dénombrement

Exercice 5.1 *(Cours : le résultat est à connaître, pas la preuve)* Soit E un ensemble fini ou infini. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$ (indication : soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. Considérer l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.). En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 5.2 *(∗)* (ensembles infinis) : on note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Montrer que l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$$
est bijective.

Exercice 5.3 *(Tous TD)* Exercice (ensembles infinis) : soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application donnée par $f(n) = -n/2$ si n est pair, et $g(n) = (n+1)/2$ si n est impair. Montrer que l'application g est bijective.

Exercice 5.4 *(Tous TD)* Exercice (ensembles infinis) : en admettant le résultat des deux exercices précédents, déterminer une bijection entre $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Exercice 5.5 (une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable) On admet que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Soit I un ensemble dénombrable. Pour tout i dans I, soit A_i un ensemble dénombrable. Montrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

Exercice 5.6 Avec trois chiffres distincts donnés différents de 0 combien de nombres distincts peut-on former ?

Exercice 5.7 (Tous TD) Calculer le coefficient de $x^2y^3z^5$ dans $(x+2y+3z)^{10}$ (on pourra utiliser deux fois de suite la formule du binôme de Newton)

Exercice 5.8 $(*)$ Dans un jeu de 32 cartes, on tire une main de 5 cartes. Quelle est le nombre de mains contenant la dame de coeur ? exactement une dame ? au moins une dame ?

Exercice 5.9 Soit n un entier naturel plus grand que 3. Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone convexe de n côtés (une diagonale d'un polygone relie deux sommets non consécutifs de celui-ci).

6 Complexes

Si besoin est, on pourra admettre le résultat suivant, qui sera démontré dans la suite du cours : si une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction polynôme, alors il existe un complexe z tel que $f(z) = 0$.

Exercice 6.1 Montrer que si a et b sont deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$, alors $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel.

Exercice 6.2 $(*)$ Que dit la formule de Moivre ? Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$, $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$ (indication : $\cos(k\theta) = Re\left(e^{ik\theta}\right)$). Calculer $\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$.

Exercice 6.3 (Tous TD) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \cos(x + (2k\pi/n))$ et $\sum_{k=1}^{n} \sin(x + (2k\pi/n))$.

Exercice 6.4 (Tous TD) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$; en déduire que $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\cos\theta$ et calculer ce polynôme pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Exercice 6.5 (Tous TD) Soit U^* le cercle unité de $\mathbb{C}$ privé du point -1 :

$$U^* = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \neq -1\}$$

On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{1-ix}{1+ix} \end{array}$$

i) Calculer, pour tout réel x, le module de $f(x)$. L'application f est-elle surjective ? injective ? Peut-on avoir $f(x) = -1$?

ii) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans U^* telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective.

iii) On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur U^* par :

$$z\mathcal{R}t \text{ si et seulement si } g^{-1}(z) \leq g^{-1}(t)$$

$\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? transitive ? une relation d'ordre ?

Exercice 6.6 $(*)$ Ecrire, sous forme d'une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, les transformations géométriques suivantes :

a) rotation de centre A$(1+i)$, d'angle $-\pi/4$
b) homothétie de centre B$(-2i)$, de rapport $1/3$
c) symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.7 Soit f l'application de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$z \mapsto f(z) = \dfrac{ln|z|}{z^2}$.

i) On pose $z = re^{it}$, avec $r \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer le module et l'argument de $z' = f(z)$. L'application f est-elle injective ?

ii) Soit R un réel strictement positif. On pose $E = \{z \in \mathbb{C}^*, |z| = R\}$. Déterminer l'image directe $f(E)$ de E par f. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 6.8 Démontrer l'égalité du parallélogramme :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}, |a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

Exercice 6.9 (Tous TD) Soient r_1 la rotation de centre A$(1 - i)$, d'angle $\pi/2$ et r_2 la rotation de centre B$(1 + i)$, d'angle $\pi/2$.

a) Définir les transformations complexes correspondant à r_1 et r_2.
b) Calculer $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$ et les caractériser géométriquement.
c) Calculer $r_1 \circ r_2 \circ r_1^{-1}$ et la caractériser géométriquement.

Exercice 6.10 Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2, z^3 soient alignés.

Exercice 6.11 Représenter géométriquement l'ensemble suivant : $\{z \in \mathbb{C}, |z - i| + |z + 1| = 2\}$

Exercice 6.12 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = \frac{2}{\bar{z}}.$$

a) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $f \circ f(z) = z$.
b) f est-elle bijective ? Si oui, calculer f^{-1}.
c) Soit R un réel strictement positif, et C le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$. Calculer $f(C)$.
d) Quel est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, f(z) = z\}$?

Exercice 6.13 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, associe :

$$f(z) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}).$$

a) Montrer que pour tout z réel, $f(z) = \cos(z)$.
b) Soit z dans $\mathbb{C}$. Montrer que $f(z + 2\pi) = f(z)$, que $f(-z) = f(z)$, et que $f(2z) = 2(f(z))^2 - 1$.
c) f est-elle injective ?
d) Calculer $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 6.14 (Tous TD) Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \; f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

a) L'application f est-elle injective ? surjective ?
b) Calculer l'image réciproque de $\{i\}$ par f.
c) Déterminer l'image directe du cercle unité U par f.

d) On note H le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du segment $[-1,1]$, et on note D l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, |z| < 1\}$. Montrer que l'on peut définir l'application :

$$\begin{array}{rcl} g : D & \longrightarrow & H \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

e) Montrer que g est bijective. (On pourra remarquer que le produit des racines de l'équation $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ est 1).

Exercice 6.15 $(*)$ Calculer les racines carrées de $-2 + 2\sqrt{3}i$, puis celles de $9i$.

Exercice 6.16 (Tous TD) Résoudre l'équation $z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$.

a) Exprimer les racines z_1 et z_2 en fonction des nombres complexes $a = (\sqrt{3} + i)/2$ et $b = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

b) Déterminer le module et l'argument de ces racines.

En déduire les valeurs de $\cos(5\pi/12)$, $\sin(5\pi/12)$, $\cos(11\pi/12)$ et $\sin(11\pi/12)$.

Exercice 6.17 $(*)$ Soit δ une racine carrée du nombre complexe z. Trouver les racines carrées de $-z$, $(1 + i)z$ et z^3 en fonction de δ.

Exercice 6.18 (Tous TD) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 6.19 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x + i)^n = (x - i)^n$$

7 Divers

Exercice 7.1 *(Cours)* (moyenne arithmétique et moyenne géométrique) Soient a et b des réels positifs. Montrer que

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

(on dit que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique).

Exercice 7.2 (généralise le résultat de l'exercice précédent)

a) Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$, puis que : $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ des réels positifs tels que $x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} \leq n + 1$. Montrer que :

$$x_1 + ... + x_n \leq n\alpha, \quad \text{où } \alpha = 1 + \frac{1}{n} - \frac{x_{n+1}}{n}.$$

c) Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1 \in \mathbb{R}_+, ..., \forall x_n \in \mathbb{R}_+$,

$$x_1 + \cdots + x_n \leq n \Rightarrow x_1 x_2 \cdots x_n \leq 1$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. Comparer leur moyenne géométrique $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ et leur moyenne arithmétique $\dfrac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.